ECOLES NORMALES SUPERIEURES ULM-SEVRES

Groupe A

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée: 4 h

Dans tout ce problème, on désigne par E un espace vectoriel réel de dimension finie et par $B : E \times E \to \mathbf{R}$ une forme *bilinéaire* (c'est-à-dire linéaire par rapport à chacune des deux variables) et *alternée* (c'est-à-dire telle que $B(x, x) = 0$ pour tout x dans E). Pour tout sous-espace vectoriel V de E, on note V^0 l'ensemble des y dans E tels que $B(x, y) = 0$ pour tout $x \in V$; on dit que V est *totalement isotrope* si $V \subset V^0$, *isotrope* si $V \cap V^0 \neq \{0\}$, *non isotrope* si $V \cap V^0 = \{0\}$.

I

1° Démontrer les propriétés suivantes :

a. On a $B(y, x) = -B(x, y)$.

b. V^0 est un sous-espace vectoriel de E et $\dim V + \dim V^0 = \dim E + \dim (V \cap E^0)$.

c. Si V est non isotrope, alors E est somme directe de V et V^0.

d. Si E est non isotrope, alors $\dim V + \dim V^0 = \dim E$, $V^{00} = V$; si E et V sont non isotropes, alors V^0 est non isotrope.

2° Soient $e, f \in E$ avec $B(e, f) = 1$; prouver que E est somme directe du sous-espace V engendré par e et f et de V^0.

3° Montrer qu'il existe des entiers m, s positifs *ou nuls*, et une base de E de la forme $(e_1, \ldots, e_m, f_1, \ldots, f_m, g_1, \ldots, g_s)$ telle que pour tout couple (a, b) de vecteurs de base, on ait $B(a, b) = 0$, à l'exception près des valeurs suivantes : $B(e_i, f_i) = 1$, $B(f_i, e_i) = -1$ pour $i = 1, \ldots, m$.

A quelle condition E est-il non isotrope ?

A partir de maintenant, et pour tout le problème, on suppose que E *est non isotrope,* et on appelle *base spéciale* de E toute base de E ayant la propriété de 3° ci-dessus. On note G le groupe des transformations linéaires bijectives u de E respectant B, c'est-à-dire telles que

$$B(u(x), u(y)) = B(x, y)$$

pour tous $x, y \in E$. On note 1 l'élément neutre de G.

4° Prouver que si V est un sous-espace non isotrope de E, toute base spéciale de V se prolonge en une base spéciale de E; prouver que si V est un sous-espace totalement isotrope de E, toute base de V se prolonge en une base spéciale de E.

5° Soient V et V′ deux sous-espaces de E tels que $\dim V = \dim V'$ et que $\dim V \cap V^0 = \dim V' \cap V'^0$. Prouver qu'il existe $u \in G$ tel que $u(V) = V'$ [lorsque V est non isotrope ou totalement isotrope, utiliser 4°; dans le cas général, considérer des supplémentaires W et W′ de $V \cap V^0$ dans V et de $V' \cap V'^0$ dans V′ respectivement, se ramener au cas où $W = W'$, puis se placer dans W^0].

II

1° On appelle *transvections* les éléments u de G possédant la propriété suivante : l'ensemble des $x \in E$ tels que $u(x) = x$ est de codimension 1. Montrer que chacune des deux propriétés suivantes est équivalente au fait que u soit une transvection :

a. u est un élément de G tel que l'image de l'application linéaire $u - 1$ soit de dimension 1,

b. Il existe $a \in E$, non nul, et $\lambda \in \mathbf{R}$, non nul, tels que, pour tout $x \in E$:

$$u(x) = x + \lambda B(x, a)\, a.$$

2° On note T l'ensemble des éléments de G qui sont produit d'une famille finie de transvections (on a $1 \in T$ par convention), et on se propose de prouver que $T = G$. Pour cela, on démontrera successivement :

a. Si $x, x' \in E$ avec $x \neq 0$, $x' \neq 0$, il existe $u \in T$ tel que $u(x) = x'$ [distinguer deux cas suivant que $B(x, x')$ est nul ou non nul].

b. Si x, x', y, $y' \in E$ avec $B(x, y) = B(x', y') = 1$, il existe $u \in T$ tel que $u(x) = x'$, $u(y) = y'$ [se ramener à $x = x'$; conclure si $B(y, x') \neq 0$; si $B(y, y') = 0$, utiliser le vecteur $x + y$].

c. On a $T = G$.

3° Prouver que le déterminant de tout élément de G est égal à 1.

4° Démontrer que, dans 1° *b* ci-dessus, on peut imposer $\lambda^2 = 1$ et qu'alors λ est uniquement déterminé, tandis que a est déterminé au signe près; on dit que u est une transvection de *vecteur a*, et qu'elle est *positive* si $\lambda = 1$, *négative* si $\lambda = -1$. Prouver que si t et t' sont deux transvections, il existe $u \in G$ tel que $t' = u\,t\,u^{-1}$ si et seulement si t et t' sont de même signe. Résoudre l'équation $t^{-1} = u\,t\,u^{-1}$, où t est une transvection et u un élément de G.

III

Un sous-groupe H de G est dit *distingué* si les conditions $g \in G$, $h \in H$ impliquent $g\,h\,g^{-1} \in H$. On se propose de prouver que G ne possède que trois sous-groupes distingués : $\{1\}$, $\{-1, 1\}$ et G.

1° Prouver que tout sous-groupe distingué de G qui contient une transvection est égal à G.

2° Soit $u \in G$; prouver l'équivalence des trois conditions suivantes : $u \in \{-1, 1\}$, $u(x)$ est proportionnel à x pour tout $x \in E$, $uv = vu$ pour tout $v \in G$. Montrer que, si $u \in G$, $u \neq -1$, $u \neq 1$, il existe une transvection t et un vecteur x tels qu'en posant $v = t^{-1}\,u^{-1}\,t\,u$, on ait $B(v(x), x) \neq 0$.

3° Soit K le groupe multiplicatif des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telles que

$$ad - bc = 1\,.$$

a. Montrer que tout sous-groupe distingué de K contenant une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ avec $a \neq 0$ est égal à K [utiliser la partie 1ª pour E de dimension 2].

b. Montrer que tout sous-groupe distingué H de K, non contenu dans $\{-1, 1\}$ est égal à K [montrer que H possède un élément de

la forme $\pm s(a)$, où $s(a) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$; calculer $s(0)^{-1}\,s(a)\,s(0)\,s(a)$, conclure lorsque $a \neq 0$; traiter enfin le cas $a = 0$].

4° Soient $u \in G$ et $x \in E$ tels que $B(u(x), x) \neq 0$; soient V le sous-espace engendré par x et $u^{-1}(x)$, et v l'élément $t^{-1}\,u^{-1}\,t\,u$ de G, où t est la transvection positive de vecteur x. Montrer que v laisse stable V et V^0, induit l'identité sur V^0 et n'induit ni 1, ni -1 sur V.

5° Démontrer que les seuls sous-groupes distingués de G sont $\{1\}$, $\{-1, 1\}$, et G.

IV

Cette partie, indépendante de III, *peut être traitée aussitôt après* II.

On note ${}^tA$ la transposée d'une matrice A, 0_m et 1_m les matrices zéro et unité à m lignes et m colonnes et J_m la matrice

$$J_m = \begin{pmatrix} 0_m & 1_m \\ -1_m & 0_m \end{pmatrix}\,.$$

On dit que A est *antisymétrique* si $A + {}^tA = 0$. Toutes les matrices considérées sont à coefficients réels.

1° Prouver que le rang de toute matrice antisymétrique est pair, et que pour toute matrice antisymétrique A, il existe une matrice carrée inversible P de même ordre et deux entiers m, s positifs ou nuls tels que

$${}^tP\,A\,P = \begin{pmatrix} J_m & 0 \\ 0 & 0_s \end{pmatrix}\,.$$

2° Montrer que, pour toute matrice carrée P telle que ${}^tP\,J_m\,P = J_m$, on a $\det(P) = 1$.

3° Démontrer qu'il existe une application unique $A \longrightarrow f(A)$ de l'ensemble des matrices antisymétriques dans **R** telle que

(*i*) $f(A) = 0$ lorsque $\det(A) = 0$.

(*ii*) $f({}^tP\,A\,P) = \det(P)\,f(A)$, pour P carrée quelconque et A antisymétrique.

(*iii*) $f(J_m) = 1$ pour tout m.

4° Montrer que $f(A)^2 = \det(A)$, $f\begin{pmatrix} 0 & M \\ -{}^tM & 0 \end{pmatrix} = \det(M)$ (M matrice carrée).

5° Comment varie $f(A)$ lorsqu'on fait sur les lignes et les colonnes de A la même permutation ?

6° Soient B une matrice antisymétrique d'ordre $2m-1$, U une ligne à $2m-1$ éléments; montrer que l'expression

$$f\begin{pmatrix} 0 & U \\ -{}^tU & B \end{pmatrix}$$

dépend linéairement de U [on pourra commencer par prouver que

$$f\begin{pmatrix} 0 & a & L \\ -a & 0 & 0 \\ -{}^tL & 0 & J_{m-1} \end{pmatrix} = (-1)^{m+1} a\,] .$$

7° Soit A une matrice antisymétrique d'ordre $2m$, et pour $1 \leqslant i, j \leqslant 2m$, soit a_{ij} l'élément de A situé à l'intersection de la ligne d'indice i et de la colonne d'indice j, et A_{ij} la matrice obtenue en retirant de A les lignes et les colonnes d'indices i et j. Démontrer la formule

$$f(A) = \sum_{j} \varepsilon_{ij}\, a_{ij}\, f(A_{ij})$$

où l'indice i est fixé, l'indice j parcourt les valeurs

$$1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, 2m$$

et $\varepsilon_{ij} = \pm 1$.

Préciser le signe de ε_{ij} en fonction de i, j, m.

8° Prouver que $f(A)$ s'exprime comme un polynôme en les coefficients a_{ij} de A et donner une forme explicite de ce polynôme.

9° La condition (i) de 3° est-elle nécessaire ?

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail